# *Sur une décomposition des matrices de Lorentz autre que la décomposition polaire .*

*A • Guimier*

## *Introduction :*

*N • M • J • Woodhouse dans son livre Special relativity - Springer2002 p.82 propose d'écrire toute matrice de Lorentz* $\boldsymbol{L}$ $(\boldsymbol{4\ x4})$ *sous la forme :*

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \boldsymbol{L_\beta} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} \text{ avec } {}^tH \bullet H = Id,\ {}^tK \bullet K = Id \quad , H, K : (3\ x3)$$

$$\text{et } \boldsymbol{L_\beta} = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Prouvons cette proposition .*

***Lemme 1 :***

*Si* $\boldsymbol{A}$ *est une matrice* $(\boldsymbol{3\ x3})$ *orthogonale :* ${}^tA \bullet A = Id$ *et* $\Lambda$ *une matrice de Lorentz*

$$\text{sans rotation : } \boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}] \\ [\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}]\,{}^t[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \text{ alors :}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}] \\ [\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}] & Id_{\mathbb{R}^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}]\,{}^t[\gamma\vec{\boldsymbol{\beta}}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tA \end{bmatrix} = \boldsymbol{\Lambda}(A\vec{\boldsymbol{\beta}}).$$

*Démonstration :*

*Il suffit de faire le produit en remarquant que* $\gamma(\boldsymbol{\beta}) = \gamma(A\vec{\boldsymbol{\beta}})$.

***Lemme 2 :***

$$\boldsymbol{\Lambda}(\vec{\boldsymbol{\beta}}) = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \boldsymbol{L_\beta} \text{ dès que } \vec{\boldsymbol{\beta}} // \vec{\boldsymbol{i}}\ .$$

*Démonstration :*

*Il suffit de remarquer que* $\vec{\boldsymbol{\beta}}_y = \vec{\boldsymbol{\beta}}_z = 0$ **.**

*Considérons maintenant une matrice orthogonale* $\boldsymbol{A}$ *telle que* $A\vec{\boldsymbol{\beta}} // \vec{\boldsymbol{i}}$**.**

*D'après ce qui précède il est immédiat que :* $\boldsymbol{\Lambda}(A\vec{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{L_\beta}$.

***Théorème :***

*Toute matrice de Lorentz* $\boldsymbol{L}$ $(\boldsymbol{4\ x4})$ *peut s'écrire sous la forme :*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tH \end{bmatrix} L_\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \text{ avec } {}^tH \bullet H = Id,\ {}^tK \bullet K = Id \quad , H, K : (3\ x3)$$

$$\text{et } L_\beta = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Démonstration :*

*Si* $L$ *est de Lorentz , elle peut s'écrire sous sa forme polaire* $L = \Lambda\cdot\Omega$

*avec* $\Lambda$ *symétrique et* $\Omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}$ *avec* ${}^t\omega\cdot\omega = Id$.

*Considérons une matrice* $H$ *telle que* $H\vec{\beta} // \vec{i}$.

*D'après ce qui précéde :* $\Lambda(H\vec{\beta}) = \Lambda_0$ *et donc :*

$$\Lambda(\vec{\beta}) = \begin{bmatrix} \gamma & {}^t[\gamma\vec{\beta}] \\ [\gamma\vec{\beta}] & Id_{R^3} + \dfrac{[\gamma\vec{\beta}]\,{}^t[\gamma\vec{\beta}]}{(1+\gamma)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tH \end{bmatrix} L_\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$$

$$\text{et donc } L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tH \end{bmatrix} L_\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{bmatrix}.$$

*Pour obtenir le résultat il suffit de prendre* $K = H\cdot\omega$.

***Remarques :***

(*1*) *Si on suppose que toute matrice de Lorentz* $L$ *peut s'écrire sous la forme :*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L_\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} \text{ avec } {}^tH \bullet H = Id,\ {}^tK \bullet K = Id \quad , H, K : (3\ x3)$$

$$\text{et } L_\beta = \begin{bmatrix} \gamma & \gamma\cdot\beta & 0 & 0 \\ \gamma\cdot\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ *alors on peut en déduire la forme polaire car :*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L_\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L_\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tH \end{bmatrix} \right) \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix} \right)$$

*or* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L_\beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tH \end{bmatrix}$ *est symétrique et* $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix}$ *est orthogonal .*

*On pose alors* $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} L_{\boldsymbol{\beta}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tH \end{bmatrix}$ *et* $\boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tK \end{bmatrix}$.

*La décomposition polaire est unique tandis que l'autre décomposition ne l'est pas .*

(**2**) *Soit* $\boldsymbol{R_\varphi}$ *la rotation* $\boldsymbol{R_\varphi} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$

*on a* ${}^tR_\varphi L_{\boldsymbol{\beta}} R_\varphi = L_{\boldsymbol{\beta}} \quad \Leftrightarrow L_{\boldsymbol{\beta}} R_\varphi = R_\varphi L_{\boldsymbol{\beta}}$

(**3**) *Supposons que la matrice de Lorentz reliant* $\boldsymbol{O}$ *et* $\boldsymbol{O'}$ *est* $L_{\boldsymbol{\beta}}$ *avec* $X = L_{\boldsymbol{\beta}} X'$

$\boldsymbol{O}$ ***et*** $\boldsymbol{O'}$ *peuvent choisir chacun une autre base spatiale.*

*Soit* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *les matrices de changement de base :* $X = AX_1$ *et* $X' = BX'_1$.

*On a alors :* $X = L_{\boldsymbol{\beta}} X' \Leftrightarrow AX_1 = L_{\boldsymbol{\beta}} BX'_1 \Leftrightarrow X_1 = {}^tAL_{\boldsymbol{\beta}} BX'_1$.

*La matrice de Lorentz sera alors* $L = {}^tAL_{\boldsymbol{\beta}} B$.

# *Bibliographie :*

*Annequin et Boutigny* ."Mécanique relativiste ,Exercices ".*Vuibert 1978.*
*R.G. Bartle* ." Modern theory of integration ".*AMS 2001.*
*Berkeley*( *Cours de Physique vol 1* ) ."Mécanique".*Armand Colin 1972.*
*P • Boyer* ."Algèbre et Géométries " . *C&M 2015* .
*P • Brousse • Mécanique • Armand Colin 1968* .
*J. Dieudonné.*"Eléments d'analyse " .*Gauthier — villars 1969* .
*F • R • Gantmacher.*"Théorie des matrices " *• Edition J • Gabay 1990.*
*R.Goblot* ."Algébre linéaire "*Masson 1995* .
*E.Gourgoulhon* ."Relativité restreinte" *• EDP Sciences 2010* .
*J. Grifone.*"Algèbre Linéaire" *• Cepadues éditions 2002* .
*J — B .Hiriart - Urruty, Y.Plusquellec.*"Exercices Algèbre linéaire".*Cepadues éditions 1988* .
*D.Langlois.*"Introduction à la relativité" *• Vuibert 2011.*
*J • M Lévy — Leblond • One more derivation of the Lorentz transformation.*
*American Journal of Physics*, *vol* 44, *n* ∘ 3, *March* 1976 *p271* — 277
*J.R. Lucas , P.E. Hodgson* "Spacetime and electromagnetism " .*Clarenton Press 1990* .
*R. Mneimé , F. Testard* ."Introduction à la théorie des groupes de Lie classiques ". *Hermann Paris 1986* .
*J - M. Monier.*"Algèbre 1 et 2". *Dunod 1997* .
*J.Ph.Pérez* ." Relativité et invariance "*Dunod 2011.*
*W.Rudin* ."Analyse réelle et complexe ".*Masson 1978* .
*C • Semay , B • Silvestre - Brac* • "Relativité restreinte". *Dunod 2010.*
*J - M. Souriau.*"Calcul Linéaire ".*PUF 1964* .
*N.M.J. Woodhouse* . " Special Relativity " .*Springer 2002* .

*Travaux préparatoires* :

*https ://archive • org / details / version — 1 a_202006 / mode / 2 up*
*https ://archive • org / details / matricesdelorentz*
*https ://archive • org / details / p_20220209_202202 / mode / 2 up*
*https ://archive • org / details / une — nouvelle — approche — axiomatique — de — la — theorie — de — la — relativite — restreinte — docu / mode / 2 up*
*https ://hal - amu • archives - ouvertes • fr / hal - 02965773 / document*